

III. MODELE MATEMATICE EXPERIMENTALE

Elaborarea experimentală a modelului matematic se impune fie când procesul este insuficient cunoscut fie când el este prea complex și se dorește un model mai simplu, bazat pe prelucrarea datelor experimentale. Operația de determinare experimentală a modelului mai poartă și numele de **identificare**. Zadeh [7] definește identificarea ca fiind determinarea, pe baza unor seturi de valori ale mărimilor de intrare și a celor de ieșire, a unui sistem dintr-o clasă de sisteme față de care sistemul care se încearcă este echivalent. În cazul identificării proceselor, sistemul care se încearcă este procesul iar elementele ce compun clasa de sisteme sunt modelele ale procesului. Echivalența modelelor se definește de obicei pe baza unei funcții de eroare.

III.1 MODELE STATISTICE

Elaborarea modelelor statistice se bazează pe corelarea statistică a datelor experimentale. Valabilitatea acestor modele este limitată la domeniul în care au fost modificate variabilele. Funcția de eroare depinde de mărimile de ieșire ale procesului și modelului (y și respectiv y_m) :

$$E = E(y, y_m) \quad (\text{III.1.1})$$

În general, etapele de desfășurare a identificării sunt următoarele:

- stabilirea structurii modelului ;
- organizarea și realizarea experimentărilor pe instalația tehnologică ;
- interpretarea și prelucrarea rezultatelor ;
- deducerea formei finale a ecuațiilor modelului și calculul coeficienților din ecuații (parametrii modelului) ;
- verificarea modelului.

În cazul în care cunoștințele disponibile despre proces nu permit stabilirea structurii modelului, această operație se face în cadrul etapei de deducere a modelului. Informații cu privire la structură pot fi obținute din examinarea unui model analitic al procesului. Întrucât obținerea datelor este afectată de erori, în modelul experimental este introdusă o anumită incertitudine, fapt ce îi conferă un caracter probabilistic.

III.1.1 Modele statistice pentru regim staționar

Vom aborda problematica modelării statistice în regim staționar recurgând la următoarele etape: inventarierea variabilelor, alegerea formei modelului, obținerea și testarea datelor, determinarea coeficienților modelului și testarea modelului.

1. Inventarierea variabilelor.

Întrucât variabilele ne semnificative se elimină de la sine în cadrul analizei de regresie, este recomandabilă o oarecare larghețe în stabilirea lor. Creșterea numărului de variabile face necesară, pentru același nivel de încredere în model, creșterea numărului de date experimentale. Cel mai sigur mod de a nu greși este examinarea unui model bazat pe ecuații de conservare (a unui model analitic).

2. Alegerea formei modelului.

În cazul elaborării unui model matematic pentru regim staționar, forma de bază a modelului este cea a unui sistem de ecuații algebrice.

Obișnuit, stabilirea numărului de ecuații se face pe baza împărțirii variabilelor în dependente (de ieșire) și independente (de intrare). Această împărțire este adesea o chestiune de experiență și de bun simț tehnic. Împărțirea se poate face și pe baza unui model dedus analitic.

Dacă u_1, u_2, \dots, u_m sunt variabile independente (de intrare) și y_1, \dots, y_k sunt variabilele dependente (de ieșire), pentru forma relațiilor de tipul:

$$y_j = f_j(u_1, u_2, \dots, u_m); \quad j=1, \dots, k \quad (\text{III.1.2})$$

nu se pot indica reguli fixe (aceste relații constituiesc modelul matematic).

În cazul în care avem o singură variabilă independentă, reprezentarea grafică a datelor experimentale poate să ne sugereze o anumită formă a ecuației (figura III.1.1).

Stabilirea formei ecuațiilor se mai poate face și prin analiza dimensională. În mod arbitrar, se poate alege pentru exprimarea dependenței o formă polinomială:

$$y(u_1, u_2, \dots, u_m) = a_0 + a_1 \cdot u_1 + \dots + a_m \cdot u_m + a_{11} \cdot u_1^2 + a_{12} \cdot u_1 \cdot u_2 + \dots + a_{1m} \cdot u_1 \cdot u_m + \dots + a_{mm} \cdot u_m^2 + \dots \quad (\text{III.1.3})$$

Alegerea unei forme de tipul ecuației III.1.3 este justificată de faptul că, în principiu, ea corespunde unei dezvoltări în serie trunchiată (de exemplu serie Taylor) a dependenței reale $y(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

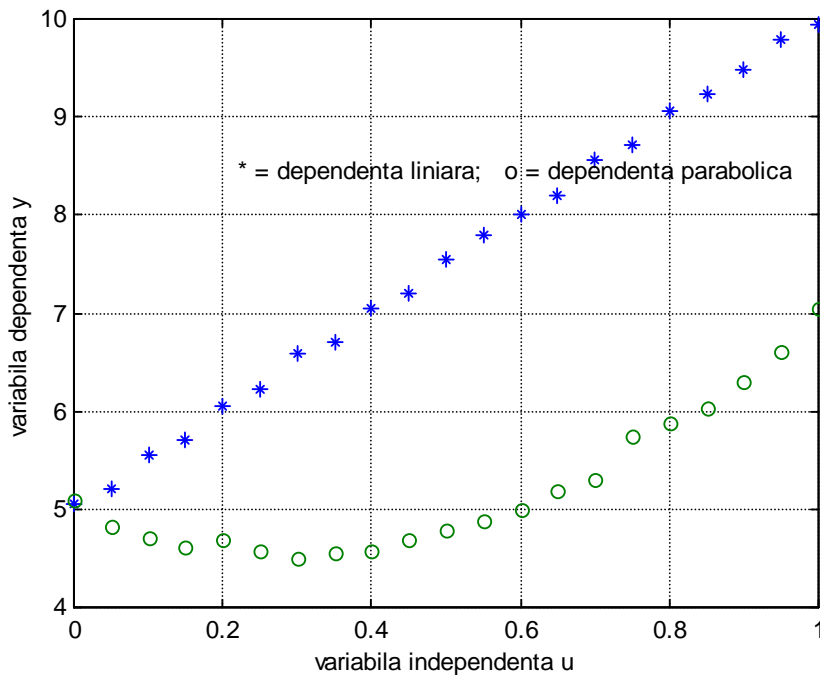


Figura III.1.1 Stabilirea formei modelului matematic pe baza reprezentării grafice a datelor experimentale :« * » - dependența liniară $y=a_0+a_1u$;« o » - dependența parabolică $y=a_0+a_1u+a_2u^2$;

Avantajul principal al formei III.1.3 o constituie liniaritatea în raport cu coeficienții modelului ($a_1, \dots, a_m, a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{mm}$).

3. Obținerea și testarea datelor

Experimentele trebuie să se desfășoare astfel încât:

- numărul datelor experimentale să fie suficient de mare pentru a putea determina coeficienții modelului ;
- experimentele să fie astfel distribuite încât să acopere în mod uniform domeniul de variație al variabilelor ;
- precizia daterminărilor să fie corespunzatoare cerințelor impuse modelului.

Dacă este posibil, este de dorit o planificare a experimentelor, de exemplu prin programare factorială ([2], [5]). În cazul instalațiilor industriale, nefiind posibilă o planificare a experimentelor, este necesar să se urmărească procesul un timp mai îndelungat (6 luni, 1 an).

Testarea și interpretarea datelor experimentale poate include aspecte referitoare la testarea reproductibilității datelor, verificarea omogenității dispersiilor și a normalității distribuțiilor, respectarea ecuațiilor de conservare (bilanț de materiale, termic) în cadrul fiecărui experiment, reconcilierea datelor de operare, reconciliere ce poate implica corectarea datelor preluate din instalație minimizând erorile în raport cu clasa de precizie a sistemelor de măsurare și evaluarea valorilor mărimilor nemăsurate [3].

4. Determinarea coeficienților modelului

A). Estimatorul celor mai mici pătrate (metoda celor mai mici pătrate).

Aplicarea estimatorului celor mai mici pătrate impune variabilelor de intrare și celor de ieșire o serie de condiții (regim staționar, mărimile de intrare nu sunt variabile aleatoare și sunt reciproc independente, iar cele de ieșire sunt variabile aleatoare de repartiție normală și cu dispersie constantă) a căror îndeplinire trebuie testată. O utilizare corectă a metodei celor mai mici pătrate implică de asemenea o repartizare uniformă a valorilor variabilelor independente în domeniul lor de definiție și un număr însemnat de date experimentale.

a). Analiza de regresie cu o singură variabilă independentă.

- Cazul dependenței liniare.

Pentru un proces cu o intrare u și o ieșire y , informații preliminare (fie un model analitic, fie reprezentarea grafică a datelor experimentale) au dus la concluzia că dependența dintre y și u este liniară:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u \quad (\text{III.1.4})$$

Să presupunem că măsurând concomitent intrarea și ieșirea s-a obținut următorul set de date:

$$(u_1, \hat{y}_1), \dots, (u_n, \hat{y}_n)$$

Conform metodei celor mai mici pătrate, suma pătratelor abaterii valorilor măsurate \hat{y}_i de la valorile y_i calculate pe baza relației (III.1.4) trebuie să fie minimă:

$$F(a_0, a_1) = [\hat{y}_1 - (a_0 + a_1 u_1)]^2 + \dots + [\hat{y}_n - (a_0 + a_1 u_n)]^2 = \sum_{i=1}^n [\hat{y}_i - (a_0 + a_1 u_i)]^2 = \min. \tag{III.1.5}$$

Estimarea coeficienților se realizează punând condiția de minim pentru funcția F : derivatele parțiale în raport cu coeficienții a_0, a_1 se egalează cu zero.

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_0} = -2 \left[n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^n \hat{y}_i \right] = 0 \tag{III.1.6}$$

$$\frac{\partial F(a_0, a_1)}{\partial a_1} = -2 \left[a_0 \sum_{i=1}^n u_i + a_1 \sum_{i=1}^n u_i^2 - \sum_{i=1}^n u_i \cdot \hat{y}_i \right] = 0$$

Rezultă următorul sistem :

$$\begin{bmatrix} n & \sum u_i \\ \sum u_i & \sum u_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{y}_i \\ \sum \hat{y}_i \cdot u_i \end{bmatrix} \tag{III.1.7}$$

Exemplul III.1.1: pentru un proces cu o intrare u și o ieșire y , forma presupusă a dependenței dintre y și u este:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u \tag{III.1.8}$$

Să se determine a_0 și a_1 , setul de date experimentale fiind:

$u_i = 0 \ 0.05 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.2 \ 0.25 \ 0.3 \ 0.35 \ 0.4 \ 0.45 \ 0.5$
 $0.55 \ 0.6 \ 0.65 \ 0.7 \ 0.75 \ 0.8 \ 0.85 \ 0.9 \ 0.95 \ 1$
 $\hat{y}_i = 5.05 \ 5.2 \ 5.55 \ 5.7 \ 6.05 \ 6.22 \ 6.58 \ 6.7 \ 7.05 \ 7.21 \ 7.55$
 $7.8 \ 8 \ 8.2 \ 8.57 \ 8.72 \ 9.07 \ 9.23 \ 9.48 \ 9.78 \ 9.95;$

O primă modalitate de calcul al coeficienților a_0 și a_1 constă în utilizarea relației III.1.7. Să examinăm acum și o altă variantă posibilă de calcul, varianta în care vom utiliza algebra liniară oferită de MATLAB.

Pentru fiecare set de date se poate scrie ecuația :

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 \cdot u_i \tag{III.1.9}$$

Coefficienții a_0 și a_1 se pot găsi prin soluționarea următorului sistem de ecuații algebrice. :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_i \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 \\ 1 & u_2 \\ 1 & u_i \\ 1 & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1.10})$$

Având în vedere forma matricii ce conține datele de intrare, solverul MATLAB «\» poate fi utilizat pentru calcularea coeficienților a_0 și a_1 ; într-un astfel de caz, se face evaluarea coeficienților prin minimizarea sumei erorilor patratice ale valorilor măsurate față de cele prezise de model.

În programul MATLAB care urmează, după calculul valorii coeficienților, se realizează reprezentarea grafică a punctelor experimentale și a dreptei de regresie (figura III.1.2).

```
u=0:0.05:1;
u=u';
y=[5.05 5.2 5.55 5.7 6.05 6.22 6.58 6.7 7.05 7.21 7.55 7.8 8
8.2 8.57 8.72 9.07 9.23 9.48 9.78 9.95];
U=[ones(size(u)) u] ;
Y=y' ;
a=U\Y ;
disp(a) ;
Y=[ones(size(u)) u]*a ;
plot(u,Y,'-',u',y', '*'),xlabel('variabila independenta u'), ...
ylabel('variabila dependentă y'),grid ;
```

Pentru coeficienții a_0 și a_1 s-au obținut următoarele valori :

$$a_0 = 5.0149$$

$$a_1 = 4.9855$$

Deci ecuația modelului matematic al procesului este :

$$y = 5.0149 + 4.9855 \cdot u \quad (\text{III.1.11})$$

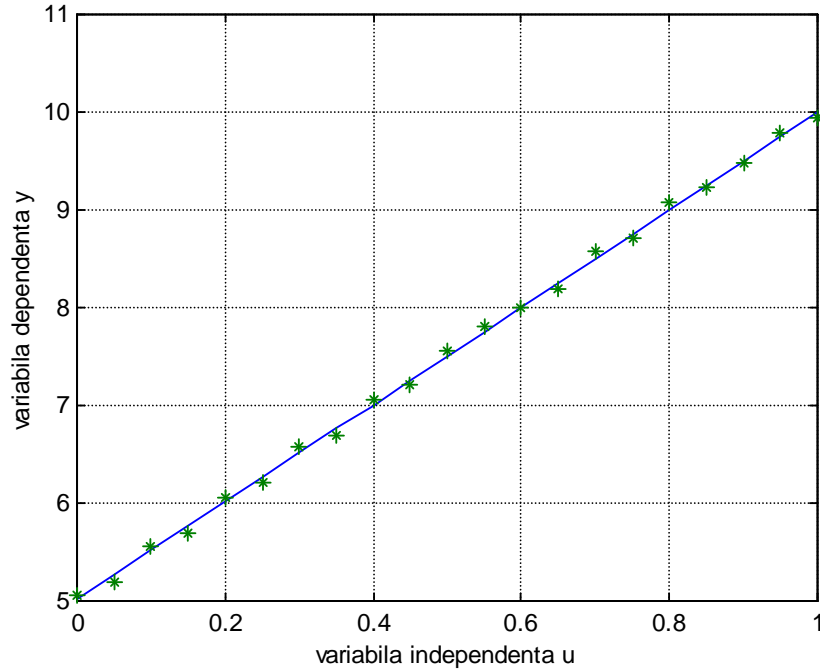


Figura III.1.2 Reprezentarea grafica a datelor experimentale și a dreptei de regresie pentru exemplul III.1.1

- *Cazul dependenței neliniare.*

Se pot întâlni două situații:

- dependența nu este liniară dar este liniarizabilă.

Exemplu:

$$y = k \cdot e^{a \cdot u} \quad (\text{III.1.12})$$

Prin logaritmare, relația III.1.12 devine liniară dar în sistemul III.1.9 în locul valorilor y_i măsurate se va introduce $\ln(\hat{y}_i)$ iar a_0 rezultat din calcul este de fapt $\ln(k)$.

- dependența dintre y și u nu este liniarizabilă.

Exemplu: $y = a_0 + a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 \quad (\text{III.1.13})$

Pentru calculul coeficienților modelului se poate aplica tot metoda celor mici pătrate:

$$F(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\hat{y}_i - (a_0 + a_1 u_i + a_2 u_i^2) \right]^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (\text{III.1.14})$$

Egalând cu zero derivatele parțiale în raport cu coeficienții a_0 , a_1 și a_2 după aranjarea termenilor, se obține următorul sistem (scris matricial):

$$\begin{bmatrix} n & \sum u_i & \sum u_i^2 \\ \sum u_i & \sum u_i^2 & \sum u_i^3 \\ \sum u_i^2 & \sum u_i^3 & \sum u_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \hat{y}_i \\ \sum \hat{y}_i \cdot u_i \\ \sum \hat{y}_i \cdot u_i^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1.15})$$

Exemplul III.1.2 : Fie un proces cu o intrare u și o ieșire y , proces pentru care s-a ajuns la concluzia că dependența teoretică dintre y și u este de forma III.1.13. Setul de date experimentale este (a se vedea și figura III.1.1):

$u_i = 0 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.2 \quad 0.25 \quad 0.3 \quad 0.35 \quad 0.4 \quad 0.45 \quad 0.5$
 $0.55 \quad 0.6 \quad 0.65 \quad 0.7 \quad 0.75 \quad 0.8 \quad 0.85 \quad 0.9 \quad 0.95 \quad 1 ;$

$\hat{y}_i = 5.1 \quad 4.82 \quad 4.7 \quad 4.62 \quad 4.69 \quad 4.58 \quad 4.5 \quad 4.55 \quad 4.57 \quad 4.69 \quad 4.79 \quad 4.88$
 $5 \quad 5.19 \quad 5.3 \quad 5.75 \quad 5.88 \quad 6.03 \quad 6.3 \quad 6.6 \quad 7.05.$

Ca și în cazul exemplului 1, și în cazul regresiei polinomiale (aici, de ordinul II), vom utiliza din nou solverul MATLAB « \ » pentru calculul valorii coeficienților din ecuația III.1.13 (o altă posibilitate este de a realiza un program care să implementeze ecuația III.1.15). Pentru fiecare set de date se poate scrie :

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 u_i + a_2 u_i^2 \quad (\text{III.1.16})$$

Coeficienții din ecuația III.1.13 se pot determina pe baza soluționării numerice a următorului sistem de ecuații :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_i \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_i & u_i^2 \\ 1 & u_n & u_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1.17})$$

Programul ce urmează calculează, pornind de la relația III.1.17, coeficienții modelului și realizează reprezentarea grafică a punctelor experimentale și a ecuației de regresie (figura III.1.3) :

```

u=0:0.05:1;
u=u';
y=[5.1 4.82 4.7 4.62 4.69 4.58 4.5 4.55 4.57 4.69 4.79 4.88 5
5.19 5.3 5.75 5.88 6.03 6.3 6.6 7.05];
U=[ones(size(u)) u u.^2] ;
y=y' ;
a=U\y ;
disp(a) ;
Y=[ones(size(u)) u u.^2]*a ;
plot(u,Y,'-',u',y','*'),xlabel('variabila independenta u'),...
ylabel('variabila dependenta y'),grid ;

```

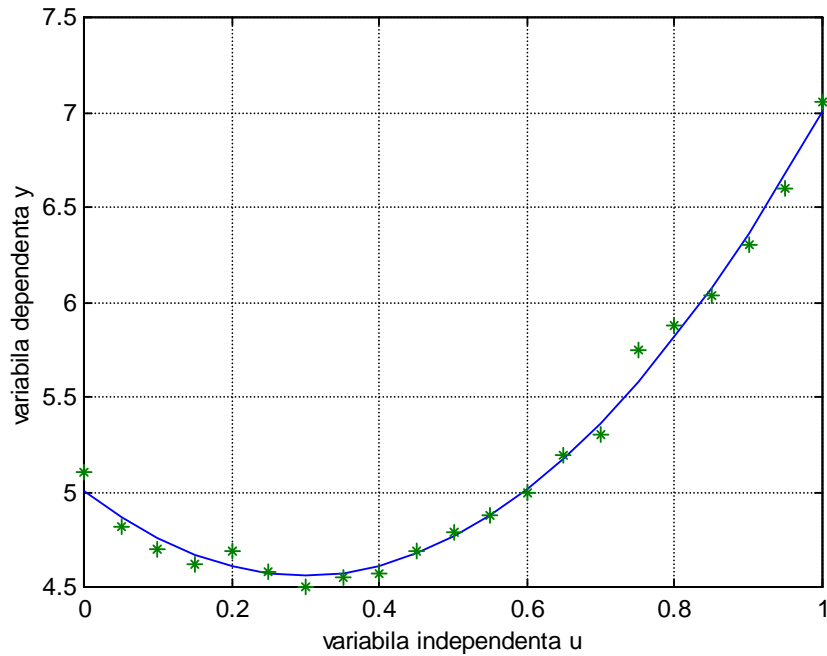


Figura III.1.3 Reprezentarea grafică a punctelor experimentale și a ecuației de regresie pentru ex. III.1.2.

Valorile coeficienților din ecuația III.1.13 sunt :

$$a_0 = 5.0007 \quad a_1 = -2.9596 \quad a_2 = 4.9686$$

În mod asemănător se poate proceda și când ecuația de regresie constă într-un polinom de ordin superior.

b). Analiza de regresie multiplă

Cazul cel mai general al modelării proceselor statice este cazul procesului cu mai multe intrări u_1, \dots, u_m și o singură ieșire y . Problema determinării modelului pentru procesele cu mai multe intrări și mai multe ieșiri se reduce la acest caz (fiecare ieșire se exprimă în funcție de mărimile de intrare).

Dacă:

$$y = a_0 + a_1 \cdot u_1 + \dots + a_m \cdot u_m \quad (\text{III.1.18})$$

este forma modelului matematic (o ieșire și m intrări), determinarea coeficienților a_0, \dots, a_m se efectuează minimizând suma abaterilor pătratice ale valorilor măsurate ale ieșirii \hat{y}_i față de cele calculate pe baza relației III.1.18.

$$F(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \min \quad (\text{III.1.19})$$

Dacă U este matricea valorilor măsurate ale variabilelor de intrare și Y este vectorul valorilor măsurate ale variabilei de ieșire:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{11} & u_{21} & \dots & u_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix} ; \quad Y = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}$$

atunci vectorul parametrilor modelului se calculează pe baza relației :

$$A = (U^T \cdot U)^{-1} \cdot U^T \cdot Y \quad (\text{III.1.20})$$

O utilizare corectă a estimatorului celor mai mici pătrate implică o repartizare uniformă a valorilor variabilelor independente în domeniul lor de definiție și un număr însemnat de date experimentale.

În cazul în care structura modelului este neliniară în raport cu parametrii, punând din nou condiția de minim a sumei abaterilor pătratice ale valorilor măsurate față de cele calculate pe baza ecuației de regresie, se obține un sistem de ecuații algebrice neliniare. Rezolvarea unor astfel de sisteme este posibilă numeric utilizând tehnici specifice: algoritmului Newton - Raphson, algoritmul Broyden, etc.

Brandon [1] a prezentat un algoritm pentru stabilirea ecuației de regresie de forma:

$$y = f_1(u_1) \dots f_j(u_j) \dots f_m(u_m) \quad (\text{III.1.21})$$

unde $f_j(u_j)$ este o funcție oarecare în raport cu u_j , funcție ai căror parametri urmează a fi determinați. Pentru variabilele de intrare, ordinea de dispunere nu este indiferentă (variabila cu ponderea cea mai mare trebuie să fie u_1 , etc). Se începe prin a construi o linie de regresie pentru care se utilizează valorile măsurate pentru y (\hat{y}_i) și pentru variabila u_1 (u_{1i}):

$$y_{u1} = f_1(u_1) \quad (\text{III.1.22})$$

Apoi se recompune esantionul (n seturi de date):

$$\hat{y}_{1i} = \frac{\hat{y}_i}{f_1(u_{1i})}; \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{III.1.23})$$

și, în consecință, rămân de determinat funcțiile f_2, \dots, f_m :

$$y_{1i} = f_2(u_2) \dots f_m(u_m) \quad (\text{III.1.24})$$

În continuare, se determină parametrii funcției $f_2(u_2)$, utilizându-se drept date valorile variabilei u_2 și noile valori \hat{y}_{1i} , valori rezultate din \hat{y}_i după « extragerea » efectului variabilei u_1 .

Procedura de determinare de determinare a funcțiilor $f_j(u_j)$ continuă până la calcularea ecuației de regresie pentru ultima variabilă.

Un procedeu de determinare a "cele mai bune ecuații de regresie" este "algoritmul schimburilor" descris de Wiezorke [8]. Cea mai bună ecuație este aceea pentru care abaterea medie pătratică este cea mai mică. Se utilizează două procedee: cel al creșterii maxime a coeficientului de determinare totală și cel al scăderii minime a coeficientului de determinare totală (în cazul primului, variabilele de intrare se introduc pe rând, în ecuație, iar la cel de-al doilea caz ele se scot pe rând).

B). Estimatorul celor mai mici pătrate generalizate. Alți estimatori.

Intre premisele care stau la baza estimatorului celor mai mici pătrate, este și aceea că dispersia σ^2 este constantă (eroarea în determinarea variabilei dependente y nu depinde de valoarea ei absolută).

Dacă dispersia lui y depinde de valoarea sa absolută, pentru a lua în considerare acest lucru, se poate introduce o mărime w care să cuantifice "importanța" punctelor luate în calcul. Cu cât dispersia măsurătorii este mai mare, cu atât, "importanța" să trebuie să fie mai mică. Pentru calculul parametrilor modelului, în cazul unui sistem liniar monovariabil, trebuie minimizată funcția:

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1 \cdot u_i)]^2 \cdot w_i \quad (\text{III.1.25})$$

Se ajunge astfel la estimatorul celor mai mici pătrate generalizate. În cazul regresiei multiple, valoarea parametrilor modelului se obține din următoarea ecuație matricială (W este matricea "importanțelor"), (Richalet [91], pag. 80):

$$A = [U^T \cdot W \cdot U]^{-1} \cdot U^T \cdot W \cdot Y \quad (\text{III.1.26})$$

Estimatorul celor mai mici pătrate recursiv este un estimator secvențial: vectorul parametrilor modelului se obține ca o combinație liniară între estimația anterioară și un termen de corecție care depinde de eroarea dintre ultima măsurătoare și valoarea estimată a acesteia (se pornește fie cu un set de valori de start, fie primele seturi de date sunt utilizate pentru a obține vectorul de start - de exemplu cu ajutorul estimatorului celor mai mici pătrate generalizate - după care estimarea decurge secvențial).

Alți estimatori, cum ar fi cel al verosimilității maxime și Bayes, impun definirea densității de probabilitate a lui y condiționată de parametrii modelului și respectiv densitatea de probabilitate a parametrilor înșiși [6,5].

5. Testarea modelului

După calcularea parametrilor modelului, este necesar să se efectueze o comparație între prezicerile modelului și datele furnizate de procesul real. Dacă modelul este adecvat, el poate fi acceptat cu condiția să nu poată fi simplificat, de pildă prin eliminarea unor termeni sau variabile (este necesară testarea semnificației coeficienților).

Drept indicatori ai adecvantei modelului se pot folosi:

- testul F al lui Fischer ;

- dispersia de adecvanță σ^2 și abaterea standard a ecuației de regresie (n este numărul de seturi de date iar m cel al variabililor independente ; y_{icalc} este valoarea rezultată pentru y pe baza ecuației de regresie iar \hat{y}_i este valoarea experimentală):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_{icalc})^2}{n - m - 1} \quad (\text{III.1.27})$$

- indicatorul preciziei modelului R^2 (\bar{y} - valoarea medie) :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{icalc} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2} \quad (\text{III.1.28})$$

- coeficientul de corelație a lui y în funcție de u_1, \dots, u_m :

$$R(y, u_1, \dots, u_m) = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_{icalc})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}} \quad (\text{III.1.29})$$

Dacă modelul nu este adecvat, se pot lua următoarele decizii:

- decizii care nu implică schimbarea formei modelului, (completarea datelor experimentale, modificarea intervalului de variație al factorilor, etc.) ;
- decizii care implică schimbarea formei modelului și reluări ale determinărilor experimentale.

III.1.2 Identificarea proceselor dinamice

Majoritatea proceselor din tehnologia chimică sunt procese multivariabile (cu mai multe intrări și mai multe ieșiri), neliniare. Modelele matematice compuse din ecuații diferențiale cu derivate parțiale neliniare sunt dificil de utilizat în elaborarea unor strategii de conducere optimală și a algoritmilor de conducere, teoria conducerii optimale fiind cu mult mai bine pusă la punct pentru procesele liniare (liniarizate) cu parametrii concentrați. Din acest motiv se încearcă să se reprezinte prin modele liniare atât procesele cu structură liniară cât și procesele cu structură neliniară, prin liniarizarea ecuațiilor acestora din urmă pe domenii restrânse de operare.

III.1.2.1 Liniarizarea modelelor neliniare.

a) Sisteme monovariabile

Fie un proces descris de următoarea ecuație diferențială neliniară:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (\text{III.1.30})$$

Dacă dezvoltăm $f(x)$ în serie Taylor în jurul punctului (de funcționare normală) x_0 , se obține:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots (\text{III.1.31})$$

Dacă se neglijează termenul de ordinul doi și cei superiori lui, se poate considera cu aproximație pentru $f(x)$ relația:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \cdot (x - x_0) \quad (\text{III.1.32})$$

Eroarea dusă prin aproximarea (III.1.32) este de același ordin de mărime cu termenul:

$$\varepsilon = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_0} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} \quad (\text{III.1.33})$$

După cum se vede din figura (III.1.4), precizia aproximării depinde atât de distanța față de punctul în care se face aproximarea cât și de punctul în care se face aproximarea (acceptabilă pe o zonă mai extinsă pentru punctul x_1).

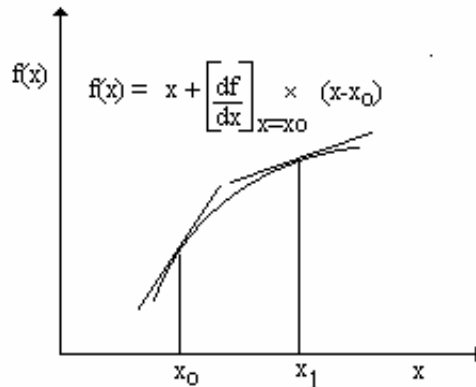


Fig. III.1.4. Precizia aproximării

Exemplul III.1.3: rezervor hidraulic cu scurgere liberă.

Pentru rezervorul hidraulic din fig.III.1.5, bilanțul de materiale în regim dinamic are forma:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \quad (\text{III.1.34})$$

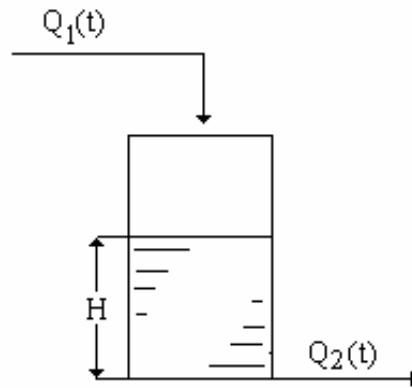


Fig. III.1.5 Rezervor hidraulic cu scurgere liberă

Având în vedere că secțiunea S a vasului este constantă, se poate scrie:

$$S \frac{dH}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \quad (\text{III.1.35})$$

Dacă se notează cu H_0 , Q_{01} , Q_{02} valorile de regim staționar, între acestea există relațiile:

$$Q_{01} = Q_{02} \quad \text{și} \quad Q_{02} = k\sqrt{H_0} \quad (\text{III.1.36})$$

Dezvoltând $Q_2(H)$ în seria Taylor în jurul punctului H :

$$Q_2(H) = Q_2(H_0) + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial H} \right)_{H=H_0} \cdot \frac{(H-H_0)}{1!} + \left(\frac{\partial^2 Q_2}{\partial H^2} \right)_{H=H_0} \cdot \frac{(H-H_0)^2}{2!} + \dots \quad (\text{III.1.37})$$

și deci, dacă ne limităm la primii doi termeni:

$$Q_2(h) = Q_2(H_0) + \left(\frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{H}} \right)_{H=H_0} \cdot (H - H_0) \quad (\text{III.1.38})$$

Bilanțul în regim dinamic ia forma:

$$S \cdot \frac{d[H_0 + h(t)]}{dt} = Q_{01} + q_1(t) - Q_{02} - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{H_0}} \cdot h(t) \quad (\text{III.1.39})$$

În relația (III.1.39), $h(t)$ și $q_1(t)$ sunt modificările nivelului și respectiv ale debitului de la valorile de regim staționar. Din relația (III.1.39), se obține forma liniară a modelului matematic în regim dinamic pentru rezervorul de scurgere liberă:

$$S \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{H_0}} h(t) = q_1(t) \quad (\text{III.1.40})$$

b). Sisteme multivariabile

Fie un sistem descris de două ecuații diferențiale neliniare de ordinul I:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2); \quad (\text{III.1.41})$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (\text{III.1.42})$$

Dacă $P(x_1^0, x_2^0)$ este punctul de funcționare normală, dezvoltând $f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$ în jurul acestui punct se obține:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) = & f_1(x_1^0, x_2^0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{x_1^0, x_2^0} (x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{x_1^0, x_2^0} (x_2 - x_2^0) + \\ & + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \right)_{x_1^0, x_2^0} \cdot \frac{(x_1 - x_1^0)^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right)_{x_1^0, x_2^0} \cdot \frac{(x_2 - x_2^0)^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1^0, x_2^0} (x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.1.43})$$

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) = & f_2(x_1^o, x_2^o) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_1 - x_1^o) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_2 - x_2^o) + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot \frac{(x_1 - x_1^o)^2}{2} \cdot \\
& + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot \frac{(x_2 - x_2^o)^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_1 - x_1^o) \cdot (x_2 - x_2^o) + \dots
\end{aligned}
\tag{III.1.44}$$

Dacă ne limităm la termenii de ordinul 1, modelul liniarizat al sistemului este:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1^o, x_2^o) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_1 - x_1^o) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_2 - x_2^o)
\tag{III.1.45}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1^o, x_2^o) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_1 - x_1^o) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_{x_1^o, x_2^o} \cdot (x_2 - x_2^o)
\tag{III.1.46}$$

III.1.2.2. Modalități de organizare și realizare a experimentelor la identificarea proceselor

1. Identificarea cu semnale de intrare.

Se utilizează semnalele de intrare periodice (semnal periodic sinusoidal sau cele periodice nesinusoidale) sau neperiodice (semnal impuls, treaptă, etc.). În cazul proceselor puternic supuse perturbațiilor, se utilizează semnale aleatoare. Există două situații la deducerea modelului matematic în regim dinamic:

- structura modelului (ordinul ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea dinamică) este cunoscută ;
- structura modelului este necunoscută. În acest caz, se face de obicei aproximarea curbelor experimentale prin expresii de forma soluțiilor unor ecuații diferențiale cu coeficienți constanți.

În industria chimică, atunci când instalația o permite, se utilizează cel mai adesea semnalul treaptă (de fapt în această formă se modifică și variabilele proceselor chimice).

Exemplul III.1.4. Va fi prezentat în continuare un exemplu simplu de identificare experimentală a modelului matematic pentru un schimbător de căldură. Se dorește menținerea constantă a temperaturii fluidului la ieșirea din schimbător. Fluidul care trebuie răcit provine, cu debit fluctuant, dintr-o altă fază a procesului tehnologic.

Ca agent de răcire se folosește apa. Mărimea de ieșire este temperatura fluidului la ieșirea din schimbător.

Schimbătorul de căldură (fig.III.1.6) poate fi considerat ca un sistem cu două mărimi de intrare: debitul de produs q_p și debitul de apă de răcire q_{H_2O} . Celelalte mărimi ce pot influența temperatura fluidului la ieșire, datorită variației lor lente, pot fi neglijate din punct de vedere dinamic.

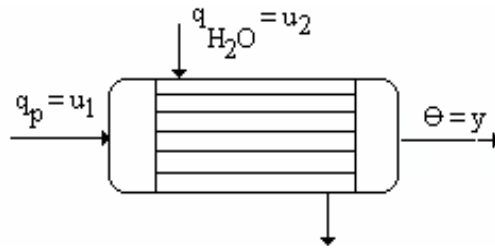


Fig. III.1.6 Schimbător de căldură

Deducerea ecuațiilor ce caracterizează comportarea dinamică se efectuează pe baza răspunsului la semnal treaptă:

A. - se menține constant debitul de apă de răcire u_2 și se modifică sub formă de semnal treaptă debitul de fluid tehnologic u_1 . Din momentul modificării debitului de fluid se urmărește variația temperaturii la ieșire (fig.III.1.7) :

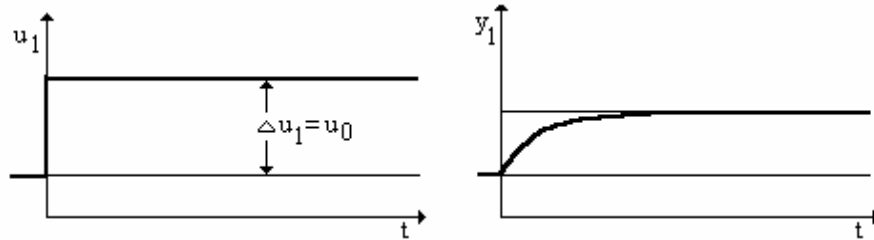


Fig III.1.7 Variația temperaturii la semnal treaptă pe debitul de fluid tehnologic

Având în vedere forma curbei de răspuns, se poate considera ca dependența între modificarea în timp a temperaturii și cea a debitului de fluid tehnologic este corect aproximată de o ecuație diferențială de ordinul I de tipul relației (III.1.47) în care $y_1(t)$ este modificarea temperaturii ca urmare a modificării debitului de produs, T_1 -constantă de timp, K - coeficientul de transfer al procesului:

$$T_1 \dot{y}_1(t) + y_1(t) = K \cdot u_1(t) \quad (\text{III.1.47})$$

La variația mărimii de intrare sub formă de semnal treaptă, $\Delta u_1(t) = u_0 = \text{constant}$. Introducând această valoare în relația III.1.47 și integrând, rezultă:

$$y_1(t) = K_1 \cdot u_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad (\text{III.1.48})$$

care exprimă răspunsul la semnal treaptă al sistemului de ordinul I considerat anterior.

Pentru identificarea constantei de timp T_1 s-au considerat punctele experimentale din figura III.1.8 (simbol 'o'), puncte preluate din fișierele de date at.dat (valorile pe timp) și atemp.dat (valorile pe temperatura) :

```
fid=fopen('D:\MATLAB\BIN\at.dat','r');
tau=fscanf(fid,'%f',[1,51]);1
fclose(fid);
fid=fopen('D:\MATLAB\BIN\atemp.dat','r');
y1=fscanf(fid,'%f',[1,51]);1
fclose(fid);
```

Ca și criteriu de căutare a valorii constantei de timp T_1 din ecuația de răspuns la semnal treaptă se utilizează minimizarea sumei celor mai mici patrate a erorilor (constituite ca diferența dintre valorile experimentale ale mărimii de ieșire și cele calculate pe baza modelului). Deci, în fiecare moment de timp, trebuie minimizată diferența dintre valoarea experimentală și cea prezisă de ecuația III.1.48. Pentru utilizarea solverului MATLAB « leastsq », s-a creat fișierul fsdin1.m, fișier ce conține funcțiile « fd » care definesc eroarea pentru fiecare valoare a timpului (51 de valori).

```
%fișier fsdin1.m
function fd=fsdin1(TV)
global tau y1 K u0
T1=TV(1);
for i=1:51
    fd(i)=y1(i)-K*u0*(1-exp(-tau(i)/T1));
end;
```

Programul debutează cu reprezentarea grafică a punctelor experimentale, continuă cu evaluarea constantei T_1 utilizând solverul MATLAB « leastsq », solver ce face parte din toolbox-ul de « optimizări » și se termină cu reprezentarea pe același grafic (III.1.8) cu simbolul '-' a valorilor estimate pe baza modelului:

```
plot(tau,y1,'o');
grid on;
axis([0 25 0 1]);
xlabel('timp [h]');
ylabel('y1(t)');
pause;

global tau y1 K u0
TV0=[1.5];
TVC=leastsq('fsdin1',TV0);
```

```

T1=TVC(1);
disp('TVC=');disp(TVC(1));

for i=1:51
    y1(i)=K*u0*(1-exp(-tau(i)/T1));
end;

hold on;
plot(tau,y1,'-');

```

Valoarea optima a constantei de timp calculate este redată la finele programului :

TVC= 2.6316

iar valorile marimii de ieșire calculate pe baza soluției analitice a ecuației III.1.47 au fost reprezentate pe același grafic III.1.8 cu linie continuă.

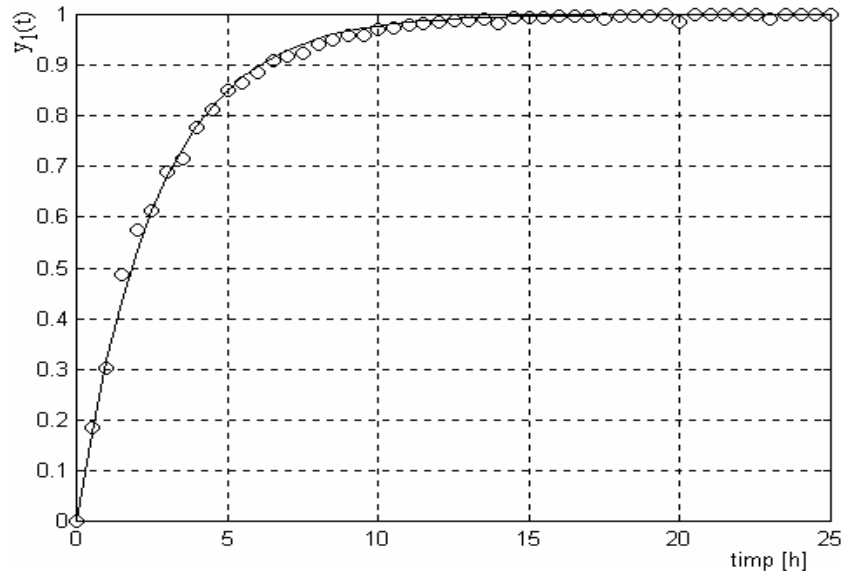


Fig. III.1.8 Variația temperaturii fluidului tehnologic la variația semnal treaptă a debitului de fluid tehnologic: "o" date experimentale "-" date model

Se observă o bună corelare a valorilor mărimii de ieșire obținută la variația semnal treaptă a mărimii de intrare cu cele calculate pe baza ecuației care exprimă răspunsul la semnal treaptă al sistemului de ordinul I considerat.

B. - se menține constant debitul de fluid tehnologic și se modifică sub formă de semnal treaptă debitul de apă de răcire. Din momentul modificării debitului de fluid se urmărește variația temperaturii la ieșire (figura III.1.9) :

Având în vedere forma curbei de răspuns, se poate considera ca dependența între modificarea în timp a temperaturii și cea a debitului apei de răcire este corect aproximată de o ecuație diferențială de ordinul II de tipul (III.1.49) în care $y_2(t)$ este modificarea temperaturii ca urmare a modificării debitului apei de răcire, T_2, T_3 - constante de timp, K - coeficientul de transfer al procesului:

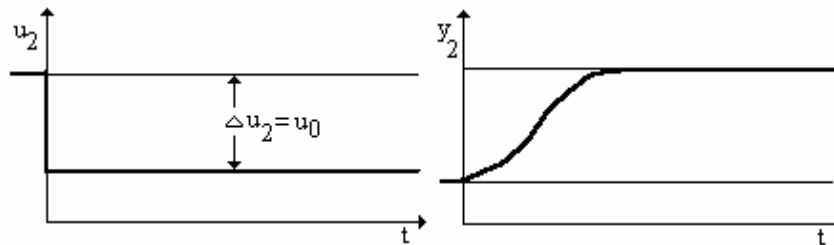


Fig. III.1.9 Variația temperaturii la semnal treaptă al debitului apei de răcire

$$T_2 T_3 y''_2(t) + (T_2 + T_3) y'_2(t) + y_2(t) = K \cdot u_2(t) \quad (\text{III.1.49})$$

La variația mărimii de intrare sub formă de semnal treaptă, $u_2(t) = u_0 = \text{constant}$. Introducând această valoare în relația III.1.49 și integrând, rezultă:

$$y_2(t) = K u_0 \left(1 - \frac{T_2}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{T_3}{T_2 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} \right) \quad (\text{III.1.50})$$

care exprimă răspunsul la semnal treaptă al sistemului de ordinul II considerat anterior.

Pentru identificarea constantelor de timp T_2 și T_3 s-au considerat punctele experimentale din figura III.1.10 (simbol 'o'), puncte preluate din fișierele de date at2.dat (valorile pe timp) și atemp2.dat (valorile pe temperatura) :

```
fid=fopen('D:\MATLAB\BIN\at2.dat','r');
tau=fscanf(fid,'%f',[1,51]);1
fclose(fid);
```

```
fid=fopen('D:\MATLAB\BIN\atemp2.dat','r');
y2=fscanf(fid,'%f',[1,51]);1
fclose(fid);
```

În aceeași manieră ca și la punctul A, în fișierul `fsdin2.m` au fost definite funcțiile ce reprezintă eroarea dintre valoarea experimentală și cea prezisă de model (ecuația III.1.50) pentru fiecare valoare a timpului.

```
% fisier fsdin2
function fd=fsdin2(TV)
global tau y K u0
T1=TV(1);T2=TV(2);
for i=1:51
    fd(i)=y2(i)-K*u0*(1-T1/(T1-T2)*exp(-tau(i)/T1)+
        T2/(T1-T2)*exp(-tau(i)/T2));
end;
```

Aceste funcții sunt utilizate de solverul «`leastsq`» în determinarea valorii constantelor de timp pe baza minimizării sumei abaterilor patratice.

Programul debutează cu reprezentarea grafică a punctelor experimentale, continuă cu evaluarea constantelor de timp T_2 și T_3 pe baza solverului MATLAB «`leastsq`», solver ce face parte din toolbox-ul de «optimizări» și se termină cu reprezentarea pe același grafic (III.1.10) cu simbolul «-» (linie continuă) a valorilor deduse prin modelare:

```
K=2;u0=0.5;
plot(tau,y2,'o');
grid on;
axis([0 25 0 1]);
xlabel('timp [h]');
ylabel('y2(t)');
pause;

global tau y K u0
%valori initiale pentru T2 si T3
TV0=[1.8 3.2];
TVC=leastsq('fsdin2',TV0);
T2=TVC(1);T3=TVC(2);
disp('TVC=');disp(TVC);

for i=1:51
    yy(i)=K*u0*(1-T2/(T2-T3)*exp(-tau(i)/T2)+T3/(T2-T3)*
        exp(-tau(i)/T3));
end;
hold on;
plot(tau,yy,'-');
```

Valorile optime ale constantelor de timp calculate sunt redate la finele programului :

$$TVC = \begin{matrix} 1.7659 & 3.2063 \end{matrix}$$

iar valorile mării de ieşire calculate pe baza soluției analitice a ecuației III.1.47 au fost reprezentate pe același grafic III.1.10 cu linie continuă.

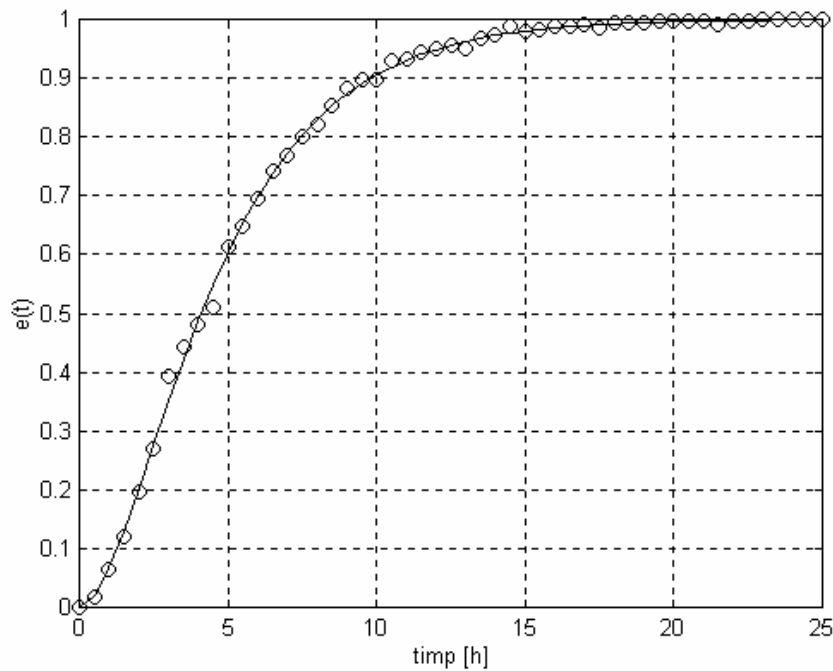


Fig. III.1.10 Variația temperaturii fluidului tehnologic la semnal treaptă al debitului apei de răcire: “o” date experimentale “-” date model

Se observă o bună corelare a valorilor mării de ieşire obținută la variația semnal treaptă a mării de intrare cu cele calculate pe baza ecuației care exprimă răspunsul la semnal treaptă al sistemului de ordinul II considerat.

Considerând sistemul în ansamblu (figura III.1.6), cu cele două intrări u_1 – debitul de fluid tehnologic și u_2 – debitul apei de răcire, într-o zonă relativ îngustă de funcționare (în jurul valorilor de temperatură și debite de funcționare normală) acesta este descris de sistemul constituit din cele două ecuații diferențiale III.1.47 și III.1.49 la care se mai adaugă, pe baza principiului suprapunerii efectelor, următoarea ecuație:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{III.1.51}$$

2. Identificarea fără semnale de intrare.

Aceasta presupune un necesar de aparatură sporit iar dificultățile de calcul sunt mai mari. Se folosește atunci când nu este posibilă utilizarea semnalelor de probă. Aceste metode se bazează pe măsurarea unui șir de valori ale variabilelor de intrare $u_1(t), \dots, u_r(t)$ și a variabilelor de ieșire $y_1(t), \dots, y_m(t)$. Prelucrarea rezultatelor se face în general pe baza teoriei estimației.

3. Identificarea cu modele ajustabile.

Se utilizează un model fizic al procesului, de obicei cu structură fixă, dar având o serie de parametri ce pot fi modificați. Modelului și procesului li se aplică aceleași valori pentru mărimile de intrare (conectarea celor două în paralel). Se compară mărimile de ieșire și, în funcție de diferențele între ele, se ajustează parametrii modelului. Procedul se repetă până la asigurarea unui anumit grad de concordanță.

III.1.2.3 Caracterizarea sistemelor cu ajutorul variabilelor de stare.

În teoria sistemelor, starea unui sistem se definește a fi informația exprimată printr-o colecție de mărimi:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \quad (\text{III.1.52})$$

care, fiind cunoscute la momentul $t = t_0$, permit calculul valorilor mărimilor de ieșire:

$$y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_m(t_0) \quad (\text{III.1.53})$$

De asemenea, cunoscând funcțiile ce descriu modificarea variabilelor de intrare:

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t) \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{III.1.54})$$

ele permit determinarea univocă a stărilor viitoare:

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{III.1.55})$$

și totodată stabilirea funcțiilor ce descriu modificarea variabilelor de ieșire (figura III.1.9):

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t) \text{ pentru } t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{III.1.56})$$

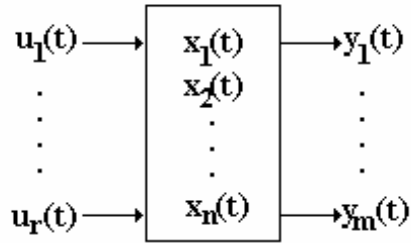


Fig III.1.9 Reprezentare schematică a unui sistem

Mărimile $x_1(t), \dots, x_n(t)$, prin care se exprimă starea unui sistem la un moment dat t , se numesc variabile de stare. Aceste variabile pot fi mărimi reale sau mărimi fictive de calcul. Variabilele de stare definesc un vector n -dimensional, vectorul mărimilor de stare:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{III.1.57}$$

Sistemul, pentru descrierea stării căruia este necesar un vector n -dimensional, se numește sistem de ordinul n .

Spațiul care conține vectorii $X(t)$ pentru toate valorile lui t se numește **spațiul stărilor**. Variabilele de stare $x_1(t), \dots, x_n(t)$ determină în spațiul stărilor, pentru fiecare valoare a lui t un vector $X(t)$ - un punct a cărui poziție, variabilă cu timpul, descrie o traiectorie, de unde și denumirea pentru acest mod de descriere: *funcțional-topologică*.

Dacă un sistem admite descrierea cu ajutorul ecuațiilor diferențiale, alegând potrivit variabilele de stare, pot fi stabilite următoarele ecuații:

- ecuații ce descriu relația între variabilele de stare și cele de intrare (numite **ecuații diferențiale de stare**):

$$x_j'(t) = f_j(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \quad j = 1, \dots, n \tag{III.1.58}$$

- ecuații ce descriu relațiile între variabilele de ieșire, pe de o parte și variabilele de stare și cele de intrare, de pe altă parte (*numite ecuații intrare-stare-ieșire*):

$$y_k(t) = g_k(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t), t) \quad k = 1, \dots, m \quad (\text{III.1.59})$$

Schema bloc corespunzătoare celor două seturi de ecuații este prezentată în figura II.28.

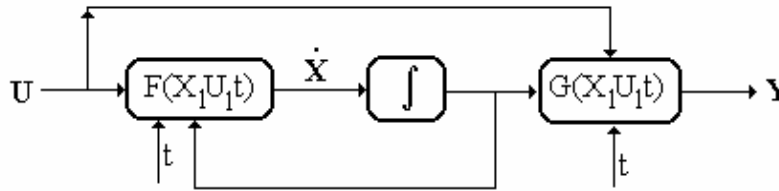


Fig. III.1.10 Schemă bloc - ecuații diferențiale care caracterizează sistemul

$$\text{unde } \overset{\circ}{X} = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.1.60})$$

În cazul general, pentru sistemele liniare, ecuațiile diferențiale de stare au forma:

$$x_1'(t) = [a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t)] + [b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1r}(t)u_r(t)] \quad (\text{III.1.61})$$

$$x_n'(t) = [a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t)] + [b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{nr}(t)u_r(t)]$$

iar ecuațiile intrare-stare-ieșire sunt de forma:

$$y_1(t) = [c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t)] + [d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1r}(t)u_r(t)] \dots \dots \dots$$

$$y_m(t) = [c_{m1}(t)x_1(t) + \dots + c_{mn}(t)x_n(t)] + [d_{m1}(t)u_1(t) + \dots + d_{mr}(t)u_r(t)] \quad (\text{III.1.62})$$

Cele două sisteme de ecuații se pot scrie în formă matricială:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t).X(t) + B(t)U(t) \\ Y(t) &= C(t).X(t) + D(t)U(t) \end{aligned} \tag{III.1.63}$$

unde: elementele matriciale coeficienților depind de timp:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nr}(t) \end{bmatrix} \tag{III.1.64}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mn}(t) \end{bmatrix} \tag{III.1.65}$$

Variabilele de stare nu sunt unice, adică același sistem poate fi descris cu diferite colecții de variabile de stare.

III.1.2.4. Variabile de stare normale. Forma normală (Zadeh și Desoer) a ecuațiilor de stare ale sistemelor liniare.

În cazul formei "normale" a variabilelor de stare variabile de ieșire $y_1(t), \dots, y_m(t)$ și primele lor $n_i - 1$ derivate unde n_i este ordinul cel mai mare de derivare al variabilei $y_i(t)$ (i ia valori de la 1 la m).

În cazul modelului matematic dedus pentru schimbătorul de căldură, dacă se notează:

$$x_1(t) = y_1(t); \quad x_2(t) = y_1'(t); \quad x_3(t) = y_2(t) \tag{III.1.66}$$

Se pot scrie ecuațiile diferențiale de stare:

$$\begin{aligned}
 x'_1(t) &= -\frac{a_{10}}{a_{11}} \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + \frac{1}{a_{11}} u_1(t) + 0 \cdot u_2(t) \\
 x'_2(t) &= 0 \cdot x_1(t) + 0 \cdot x_2(t) + 1 \cdot x_3(t) + 0 \cdot u_1(t) + 0 \cdot u_2(t) \\
 x'_3(t) &= 0 \cdot x_1(t) - \frac{a_{20}}{a_{22}} \cdot x_2(t) - 0 \frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_3(t) + 0 \cdot u_1(t) + \frac{1}{a_{22}} \cdot u_2(t)
 \end{aligned} \tag{III.1.67}$$

Ecuția intrare - stare - ieșire este:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 0 \cdot x_3(t) + 0 \cdot u_1(t) + 0 \cdot u_2(t) \tag{III.1.68}$$

Exprimarea matricială:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{10}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ a_{11} & & \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a_{20}}{a_{22}} & -\frac{a_{21}}{a_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{III.1.69}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{III.1.70}$$

Caracterizarea sistemelor prin variabile de stare permite abordarea unor probleme complexe de conducere optimală, inclusiv de conducere multivariabilă.